## 培优课07 利用导数证明不等式

### 培优点一 单变量的不等式证明

#### 审题指导

典例1 [2023·新高考Ⅱ卷节选]证明：（审题①移项作差构造函数审题②利用导数研究两函数的单调性,从而证明）.

**解题观摩**

[解析]，…………审题①

则对恒成立，

，…………审题②

所以,.

，…………审题①

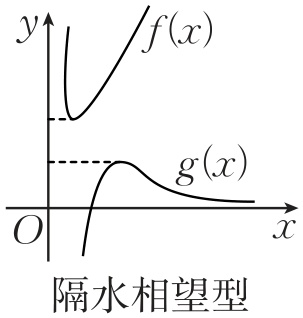
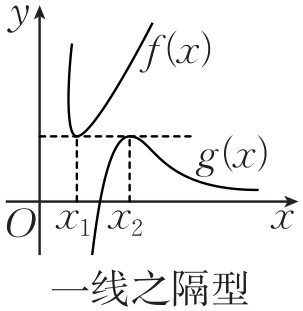
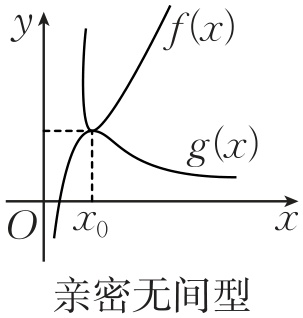
则,，令,，则对恒成立，则在上单调递增，可得，即对恒成立，

，…………审题② 所以,.综上所述，.

#### 通性通法

**利用导数证明不等式的基本方法**

1.若与的最值易求出，则可以直接转化为证明，但有的时候为了证明在上恒成立，我们可以将其转化为证明在上恒成立，通过分别求出两个函数的最值证得，有以下三种情况：

（1）隔水相望型：.

（2）一线之隔型：,.

（3）亲密无间型：.

2.若在上，与的最值不易求出，则可构造函数.若，则在上单调递增，同时，即；若，则在上单调递减，同时，即.

#### 培优训练

##### 构造双函数证明不等式（凹凸反转）综合变式

1. 已知函数，求证：.

[解析]要证，即证，即证.

设，则，

由，得，由，得，

则，当且仅当时，等号成立.

设，则.

由题意可得.

由，得，由，得,

故,所以当时，.

由，得，由，得，

则，当且仅当时，等号成立.

因为与等号成立的条件不同，

所以，即.

##### 放缩后构建函数证明不等式综合变式

2. 已知函数，求证：当时，.

[解析]当时，要证明，即证明，

而，故只需要证明.

先证，记，

，

当时，，在上单调递增，

，故，即.

再证，令，

则,则,

故对于，都有，因而在上单调递减，

对于，都有，因此对于，都有，成立，即成立，故原不等式成立.

### 培优点二 双变量的不等式证明

#### 审题指导

典例2 已知函数（审题①先求导分析函数的单调性）.（审题②由单调性确定，所在区间并结合构造函数证明审题③出现双变量且无法直接得到，的关系，可以考虑比值，引入新元，实现减元审题④用新元表示出，再构造函数通过导数证明）

**解题观摩**

[解析]由题意知，，

；…………审题①

.…………审题①

因为,且，当时，,当时，,当时，,

.…………审题②

先证，即证，.…………审题②

，…………审题②

则.因为，所以，所以恒成立，所以单调递增, 所以，所以，所以,得证. 再证，.…………审题③

由可得,，

.…………审题③

而等价于,等价于,等价于,等价于.

，…………审题④

再令，则，则在上单调递减，

故，则，故在上单调递减，则，

即，所以，得证.

故.

#### 通性通法

**双变量不等式证明的五种思路**

1.减元法：当,是函数的两个不等的极值点时，,是方程的两个不等实根，由根与系数的关系可得,之间的关系，由此可利用替换法将双变量化为单变量.

2.构造法：先利用条件消去参数，把所证明的不等式化为仅含,的式子，通过运算，构造,,等为变量的函数，利用这个新函数的性质解决问题.

3.对称化构造法：对结论型，构造函数；对结论型，构造函数或两边同时取对数构造函数，再通过研究的单调性证明不等式.

4.比值代换法：通过代数变形将所证双变量不等式通过代换化为单变量的函数不等式，利用函数的单调性证明.

5.对数与指数均值不等式法（需证明）对任意的,，有，令,，则可得到指数均值不等式：.

【注意】其中3，4，5通常被称为极值点偏移问题.

#### 培优训练

##### 减元法证明不等式综合变式

1. 已知有两个极值点,，求证：.

[解析]由题意，得.

因为函数有两个极值点,，所以方程有两个不同的正实数根,,

所以且，解得.

由题意得，

令，则，

所以在上单调递减，所以，

故.

##### 构造法证明不等式（证明对数均值不等式）综合变式

2. 对任意的,，求证：.

[解析]不妨设，先证，即证，即证，

令，只要证，即证，

令，则，

令，则，

所以在上单调递减，即在上单调递减，

所以，所以在上单调递减，

则，所以，即.

再证，即证，即证，

令，只要证，即证，

令,同理可证在上单调递增，有，

所以，即.

综上，，证毕.

##### 对数均值不等式法证明不等式综合变式

3. [2022·新高考Ⅱ卷节选]设，求证：.

[解析]不等式左侧可看作数列的前项和，其通项公式为，右侧可看作数列的前项和，故，当时，,所以.

故只需证，即证.由对数均值不等式可得，，令,，则有，即.故.